

# Kansrekening en financieel waarderen: de actuaris aan het werk

---

Junior College

Katrien Antonio & Kristien Smedts

9 & 10 januari 2024

Geïnspireerd op onze leermodule *Tijd is geld - kasstromen bij de aankoop van een woning financieel en actuairueel waarderen*

Via STEM/**ECON** maak je vandaag kennis met de financiële algebra bij ...

- Hoofdstuk 2 over 'Eerste keer sparen' met o.a. 'rente-op-rente' of **samengestelde interest**.
- Hoofdstuk 6 over 'Eerste keer **huren**, **kopen** of bouwen (en **lenen**)'.
- Hoofdstuk 11 over 'Eerste keer **verzeker**en' met o.a. de schuldsaldoverzeker



Nieuwe leermodule, met als centrale **onderzoeksvragen**:

- (Hoofdstuk 1) **'Time is money!'**: hoeveel tijd? hoeveel geld? en hoe staan die twee met elkaar in verband?
- (Hoofdstuk 2) hoe helpt deze kennis je bij **financiële beslissingen**, bijv. bij de **aankoop van een woning**?
- (Hoofdstuk 3) wat met **financieel en actuariel waarden**? en hoe gebruik je deze kennis om bijv. de **schuldsaldoverzekerings** bij een lening beter te begrijpen?

KU LEUVEN

Junior College STEM en economie

**Tijd is geld**

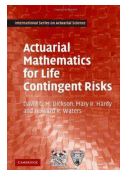
**Kasstromen bij de aankoop van een woning  
financieel en actuariel waarden**

Handleiding voor de leraar



Jonas Fillée, Marlies Creemers, Katrien Antonio, Kristien Smedts,  
Jesse Aerts, Johan Deprez, Tom Van Doorselaere

- Basis **financiële kennis** is belangrijk!
- Verdieping in **bank- en financiewezen** of **actuariële wiskunde** in bijv. de studies (toegepaste) economische wetenschappen, handelsingenieur en (toegepaste) wiskunde.
- **Onderzoeksthema's** die wij behandelen: ~ **data wetenschap voor verzekeraars**
  - (**Katrien**) hoe bepaalt een verzekeraar de prijs van een (auto/schuldsaldo/...)verzekering, als er geen onderscheid mag zijn tussen de premie voor  $M/V/X$ ? welke segmentatiecriteria zijn relevant (en toegelaten) om in rekening te nemen?
  - (**Katrien**) hoe groot moet de buffer bij een verzekeraar zijn om de schades gemeld na een overstroming te vergoeden?
  - (**Katrien**) hoe kunnen toekomstige scenario's voor sterftekansen voor de Belgische bevolking gesimuleerd worden, en hoe kunnen deze gebruikt worden om bijv. pensioenverplichtingen te waarderen?



# Tijdswaarde van geld

Leg een **tijdslijn** en **tijdseenheid** vast (bijv. 1 jaar):

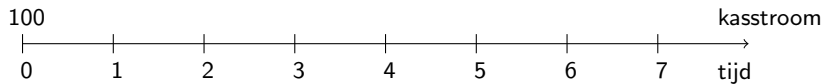
- $t = 0$  is nu ('present moment')
- $t = k$  is  $k$  tijdseenheden in de toekomst.

Leg eenheid van **kapitaal** vast (bijv. 1 EUR):

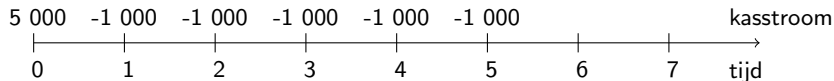
- **kasstroom** ('cash flow') op tijdstip  $k$ :  $c_k$
- met teken conventie

bijv. (positief) **te betalen** op  $t = k$  of (negatief) **te ontvangen** op  $t = k$  (of omgekeerd).

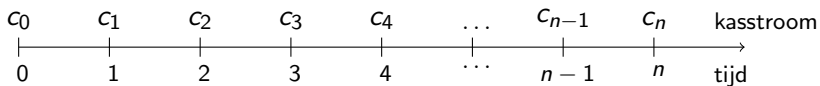
Een voorbeeld van een **kasstroom**:



Een voorbeeld van een **kasstroom vector**:



In het algemeen: **kasstroom vector**  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ , met lengte  $n + 1$ :



Typische vraagstellingen:

- berekening van een **slotwaarde (SW)**: bijv. hoeveel is 1 EUR nu ( $t = 0$ ) waard aan het eind van het jaar ( $t = 1$ )?
- berekening van een **actuele waarde (AW)**: bijv. hoeveel EUR moet je nu ( $t = 0$ ) op een rekening zetten om 1 EUR te hebben op  $t = 1$ ?

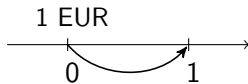
De **rente** of **interest** ('interest rate') bepaalt de groei van geld.

**Hoezo?**



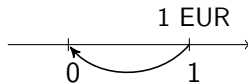
Stel  $i$  is de constante, jaarlijkse rente.

## Oprenten

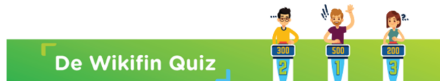


- 1 EUR op  $t = 0$  **groeit tot**  
 $1 + 1 \cdot i = 1 \cdot (1 + i)$  EUR op  $t = 1$
- $(1 + i)$  is de interestfactor
- met  $i = 0.03$ : 1 EUR op  $t = 0$  groeit tot 1.03 EUR op  $t = 1$

## Disconteren



- 1 EUR op  $t = 1$  **disconteert tot**  $1 \cdot \frac{1}{1+i}$  EUR op  $t = 0$
- $\frac{1}{1+i} = (1 + i)^{-1} = v$  is de discontofactor
- met  $i = 0.03$ : 1 EUR op  $t = 1$  is  $\approx 0.97$  EUR waard op  $t = 0$

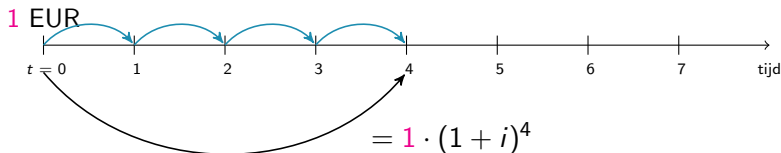


Uit de Wikifin **Kennisquiz over geldzaken**:

Je stort op 1 januari 100 euro op een spaarrekening, die jaarlijks 2% interest opbrengt. Je stort een volledig jaar niets meer bij en haalt niets meer van je rekening. Hoeveel zal er na 1 jaar op je rekening staan?

- A. Minder dan 102 EUR.
- B. 102 EUR.
- C. Meer dan 102 EUR.
- D. Ik weet het niet.

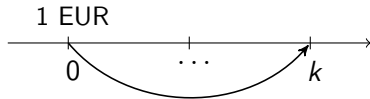
Bron: <https://www.wikifin.be/nl/wikifin-school>, een initiatief van de FSMA, de Autoriteit voor Financiële Diensten en Markten.



- 1 EUR op  $t = 0$  groeit tot  $1 \cdot (1 + i)$  EUR op  $t = 1$ .
- $1 \cdot (1 + i)$  EUR op  $t = 1$ , groeit tot  $1 \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = 1 \cdot (1 + i)^2$  EUR op  $t = 2$ .
- ...
- $1 \cdot (1 + i)^3$  EUR op  $t = 3$  groeit tot  $1 \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) = 1 \cdot (1 + i)^4$  EUR op  $t = 4$ .

## Oprenten

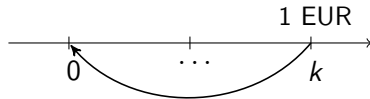
- 1 EUR op  $t = 0$  groeit tot  $1 \cdot (1 + i)^k$  EUR op  $t = k$



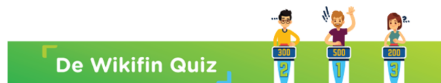
- met  $i = 0.03$ : 1 EUR op  $t = 0$  groeit tot  $\approx 1.06$  EUR op  $t = 2$  en tot  $\approx 3.26$  EUR op  $t = 40$

## Disconteren

- 1 EUR op  $t = k$  disconteert tot  $1 \cdot (1 + i)^{-k} = 1 \cdot v^k$  EUR op  $t = 0$



- met  $i = 0.03$ : 1 EUR op  $t = 2$  is  $\approx 0.94$  EUR waard op  $t = 0$

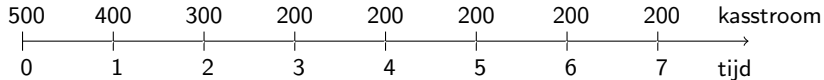


Uit de Wikifin **Kennisquiz over geldzaken**:

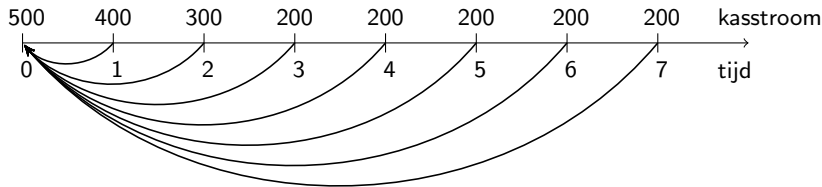
Je laat je spaarrekening uit de vorige quiz vraag (jaarlijkse interest 2%) gedurende 5 jaar onaangeroerd, dus je doet geen nieuwe stortingen of je haalt niets af. Hoeveel zal er na 5 jaar op je spaarrekening staan?

- A. Minder dan 110 EUR.
- B. 110 EUR.
- C. Meer dan 110 EUR.
- D. Ik weet het niet.

Bron: <https://www.wikifin.be/nl/wikifin-school>, een initiatief van de FSMA, de Autoriteit voor Financiële Diensten en Markten.



De waarde op  $t = 0$  van deze kasstroom vector is de contante of actuele waarde (AW):  
disconteer hiervoor elk van de kasstromen van de vector naar  $t = 0$



Met vector  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_7) = (500, 400, 300, 200, 200, 200, 200, 200)$ :

$$\begin{aligned} AW &= c_0 + c_1 \cdot (1+i)^{-1} + c_2 \cdot (1+i)^{-2} + \dots + c_7 \cdot (1+i)^{-7} \\ &= c_0 + c_1 \cdot v + c_2 \cdot v^2 + \dots + c_7 \cdot v^7, \text{ met } v = (1+i)^{-1}. \end{aligned}$$

Laat zien dat de AW van deze kasstroom vector gelijk is aan 2 034.49 bij  $i = 0.03$ !

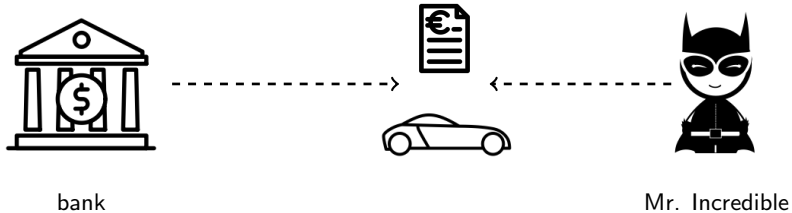
# Geld lenen en aflossen

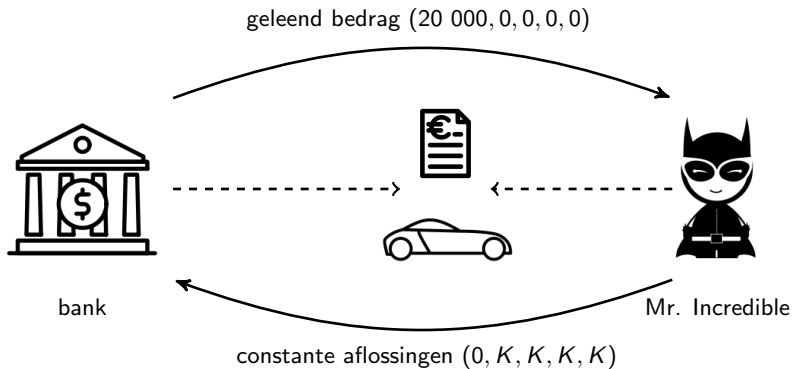


In diverse financiële transacties: **equivalentie opstellen** tussen de (contante) waarde van twee kasstroom vectoren.

Voorbeelden:

- **lening**: kapitaal ontvangen van de bank  $\iff$  de terugbetalingen of **aflossingen** die je doet aan de bank.
- **verzekeringsproduct**: uitkeringen of verzekerde bedragen  $\iff$  de **premie(s)** die je betaalt voor deze verzekering.





De bank vraagt compensatie voor het uitlenen van 20 000 EUR aan Mr. Incredible, zeg  $i$  per jaar.

### Twée kasstromen:

- Mr. Incredible ontvangt 20 000 EUR op  $t = 0$  van de bank.
- Mr. Incredible betaalt aan de bank  $K$  EUR op  $t = 1, 2, 3, 4$ .

Dit kan je schrijven als vector  $(0, K, K, K, K)$ , met actuele waarde

$$K \cdot v + K \cdot v^2 + K \cdot v^3 + K \cdot v^4$$

met  $v = (1 + i)^{-1}$ , **schets op een tijdslijn!**

### Aflossing $K$ berekenen

De transactie is **marktconform**, of de kasstromen zijn **actuarieel equivalent**, indien:

$$\begin{aligned} 20\,000 &= K \cdot v + K \cdot v^2 + K \cdot v^3 + K \cdot v^4 = K \cdot (v + v^2 + v^3 + v^4) \\ &= K \cdot v \cdot (1 + v + v^2 + v^3). \end{aligned}$$

Vragen:

- laat zien dat bij  $i = 0.03$  de aflossing  $K = 5\,380.54$  EUR (met Excel én via somregels meetkundige rij).
- wat is het totaal bedrag dat onze superheld aan de bank terugbetaalt?

Zie ook online kredietsimulatoren, vb.

<https://www.wikifin.be/nl/budget-betalen-lenen-en-verzekeren/kredietcalculator>.

# Pensioen- en levensverzekeringsproducten

## Zoek een belangrijk verschil!

23



actuaris



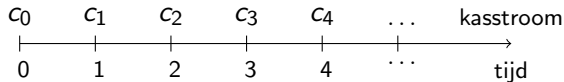
Mr. Incredible's  
----->  
autolening



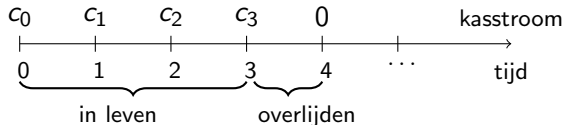
Mrs. Incredible's  
----->  
pensioen of lijfrente



- Tot nu waren onze kasstromen **gegarandeerd**:



- Bij een lijfrente ('life annuity') is de kasstroom **afhankelijk van het in leven zijn van de begunstigde**:

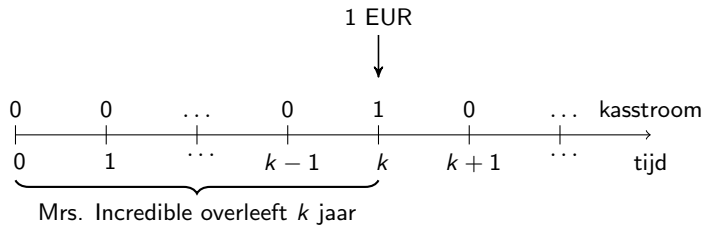


Bijgevolg: aantal betalingen is niet deterministisch, maar **stochastisch**!



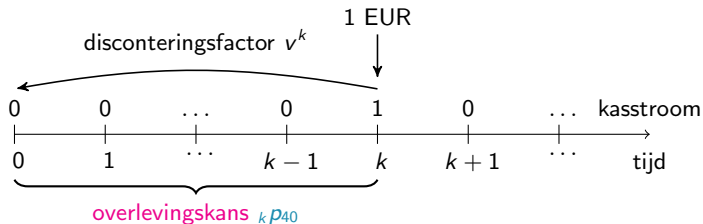
Mrs. Incredible is een 40-jarige superheld op  $t = 0$  en doet aan pensioenplanning.

Mrs. Incredible is geïnteresseerd in onderstaand (eenvoudig) pensioenproduct:



Hoe kunnen we **van financieel naar actuariel waarderen** overstappen? **Met kansrekening!**

Van financieel naar actuariel waarderen:

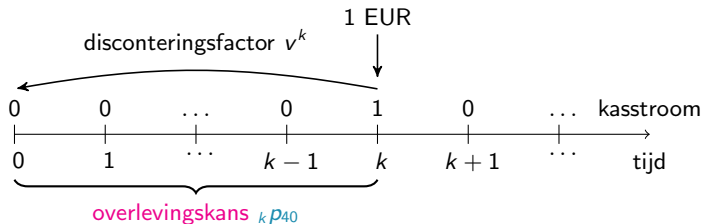


Met **verwachte** contante waarde ('expected present value' of EPV):  $1 \cdot v^k \cdot {}_k p_{40}$ .

**Quiz vraag:** vul in  $>$ ,  $=$  of  $<$

$$1 \cdot v^k \cdot {}_k p_{40} \quad ?? \quad 1 \cdot v^k.$$

Van financieel naar actuariel waarderen:



Met **verwachte** contante waarde ('expected present value' of EPV):  $1 \cdot v^k \cdot {}_k p_{40}$ .

Inderdaad, bijv. voor  $k = 25$  is  ${}_{25}p_{40} \approx 0.93$  (cfr. StatBel, periode tafel 2020, vrouwen)

$$1 \cdot v^k \cdot {}_k p_{40} < 1 \cdot v^k.$$

Zeg  $P$  de prijs (op  $t = 0$ ) van dit product.

Veronderstel dat 1 000 40-jarige (vrouwelijke) superhelden dit product kopen op  $t = 0$ .



Iedere superheld betaalt  $P$  op  $t = 0$ .

Verzekeraar ontvangt  $1\,000 \cdot P$  op  $t = 0$  (**'premies'**).

Dit bedrag groeit aan tot  $1\,000 \cdot P \cdot (1+i)^k$  op  $t = k$ .

Naar verwachting ('gemiddeld') zijn  $1\,000 \cdot {}_k p_{40}$  superhelden in leven op  $t = k$ .  
(Verwachtingswaarde van een  $\text{BIN}(n, p)$  verdeling is  $n \cdot p$ .)

Zij moeten allemaal 1 EUR ontvangen op  $t = k$  van de (levens)verzekeraar.

Actuarieel equivalent betekent hier:

$$\begin{aligned} 1\,000 \cdot P \cdot (1+i)^k &= 1 \cdot 1\,000 \cdot {}_k p_{40} \\ \Downarrow \\ P &= 1 \cdot (1+i)^{-k} \cdot {}_k p_{40} = 1 \cdot v^k \cdot {}_k p_{40}. \end{aligned}$$

Tot slot

## Tot slot

Met (een uitbreiding van) deze basistechnieken kan je

- **financieel waarden**, bijv.:

- actuele waarde van een investering
- leningen

- **actuarieel waarden**, bijv.:

- een verzekering bij overlijden, zoals een schuldsaldoverzekering
- een maandelijks ouderdomspensioen, of ... Win for Life product.

De combinatie van financieel waarden en kansrekening is essentieel bij het **rekenen aan risico's**, het werkgebied van de actuaris!

