Kansrekening en financieel waarderen: de actuaris aan het werk

Katrien Antonio & Kristien Smedts

12 januari 2022

KU LEUVEN

AMSTERDAM SCHOOL OF ECONOMICS Economics

Katrien Antonio
prof. actuariële wetenschappen

Kristien Smedts
prof. finance

Meer informatie via Katrien's webpagina en www.lrisk.be, de LRisk webpagina.

Onderzoeksvraag

- Levensweg: van school tot pensioen.
- Welke verzekeringspolissen aanschaffen? Waarom?

Onderzoeksvraag

- Hoofdstuk 2 over ‘Eerste keer sparen’ met o.a. ‘rente op rente’ of samengestelde interest.
- Hoofdstuk 6 over ‘Eerste keer huren, kopen of bouwen (en lenen)’.
- Hoofdstuk 11 over ‘Eerste keer verzekeren’ met o.a. de schuldsaldoverzekering.

Onderzoeksvraag

Kennismaking met de **financiële algebra** bij . . .

- Hoofdstuk 2 over 'Eerste keer sparen' met o.a. 'rente op rente' of **samengestelde interest**.
- Hoofdstuk 6 over 'Eerste keer huren, kopen of bouwen (en **lenen**)'.
- Hoofdstuk 11 over 'Eerste keer **verzekeren**' met o.a. de schuldsaldoverzekering.

Waarderen van een kasstroom

Een kasstroom

Leg een eenheid van **kapitaal** (bijv. 1 EUR) en een **tijdseenheid** vast (bijv. 1 jaar):

- $t = 0$ is nu ('present moment')
- $t = k$ is k tijdseenheden in de toekomst.

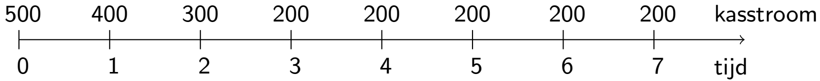
Kasstroom ('cash flow') op tijdstip k:

- c_k
- leg teken conventie vast

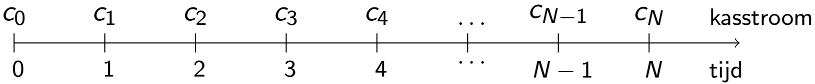
  bijv. (positief) te betalen op $t = k$ of (negatief) te ontvangen op $t = k$ (of omgekeerd).

Een vector van kasstromen

Een voorbeeld:



In het algemeen: **kasstroom vector** $\boldsymbol{c} = (c_0,\ c_1, \dots, c_N)$



Wat is de lengte van deze kasstroom vector?

Waarderen van een kasstroom vector

Cruciaal:

- tijdstip van kasstroom!
- tijdswaarde van geld: 1 EUR vandaag is meer waard dan 1 EUR in de toekomst!

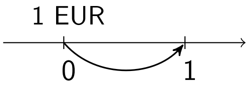
Typische vraagstellingen:

- hoeveel is 1 EUR nu ($t = 0$) waard aan het eind van het jaar ($t = 1$)?
- hoeveel EUR moet je nu ($t = 0$) op een rekening zetten om 1 EUR te hebben op $t = 1$?

De **rente** ('interest rate') bepaalt de groei van geld.

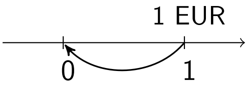
Rente en disconteringsfactor

Oprenten

- i is de constante rente
- 1 EUR op $t = 0$ groeit tot $1 \cdot (1 + i)$ EUR op $t = 1$
- 

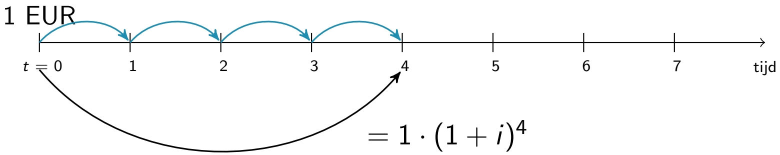
- met $i = 0.03$: 1 EUR op $t = 0$ groeit tot 1.03 EUR op $t = 1$

Disconteren

- $v = \frac{1}{1+i}$ is de discontofactor of disconteringsfactor
- 1 EUR op $t = 1$ disconteert tot $1 \cdot v$ EUR op $t = 0$
- 

- met $i = 0.03$: 1 EUR op $t = 1$ is ≈ 0.97 EUR waard op $t = 0$

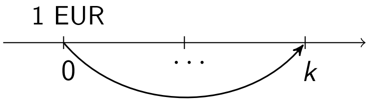
Van 1 periode naar k perioden: samengestelde interest



- 1 EUR op $t = 0$ groeit tot $1 \cdot (1 + i)$ EUR op $t = 1$.
- $1 + i$ EUR op $t = 1$, groeit tot $(1 + i) \cdot (1 + i)$ EUR op $t = 2$.
- ...
- $(1 + i)^3$ EUR op $t = 3$ groeit tot $(1 + i)^3 \cdot (1 + i) = (1 + i)^4$ EUR op $t = 4$.

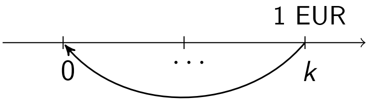
Van 1 periode naar k perioden

Oprenten

- 1 EUR op $t = 0$ groeit tot $(1+i)^k = v^{-k}$ EUR op $t = k$
- 

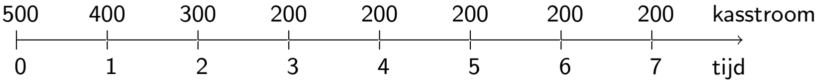
- met $i = 0.03$: 1 EUR op $t = 0$ groeit tot ≈ 1.06 EUR op $t = 2$

Disconteren

- 1 EUR op $t = k$ disconteert tot $(1+i)^{-k} = v^k$ EUR op $t = 0$
- 

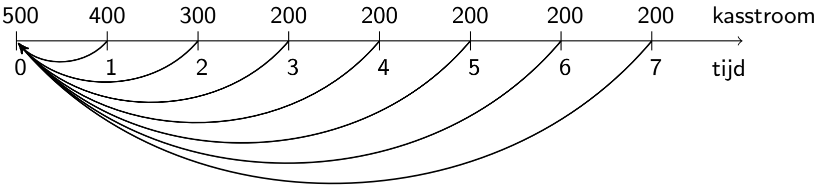
- met $i = 0.03$: 1 EUR op $t = 2$ is ≈ 0.94 EUR waard op $t = 0$

Contante waarde van een kasstroom vector



Wat is de waarde op $k = 0$ van deze kasstroom vector?

Dit is de **contante of actuele waarde** (CW of AW) (‘*present value*, PV’).



Met vector $\boldsymbol{c} = (500, 400, 300, 200, 200, 200, 200, 200)$:

$$\begin{aligned} \text{PV} &= c_0 + c_1 \cdot v + c_2 \cdot v^2 + \ldots + c_7 \cdot v^7 \\ &= \sum_{k=0}^{7} c_k \cdot v^k. \end{aligned}$$

Laat zien dat PV van deze kasstroom vector gelijk is aan 2034.49 bij $i = 0.03$!

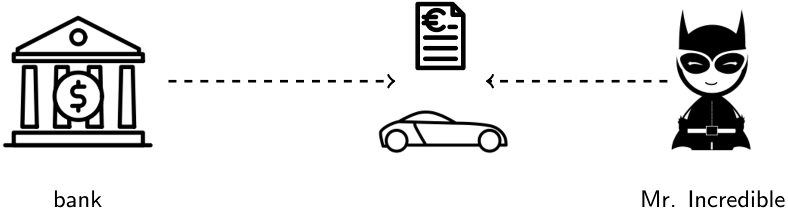
Actuariële equivalentie van kasstromen

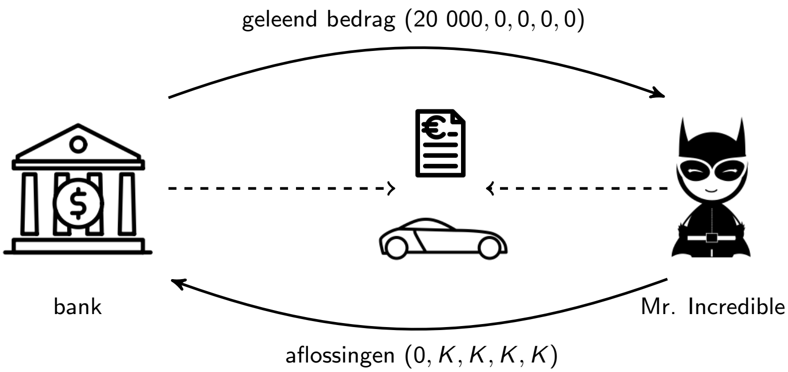
In diverse financiële transacties: equivalentie opstellen tussen (de contante waarde van) twee kasstroom vectoren.

Voorbeelden:

- **lening**: kapitaal ontvangen van de bank $\Longleftrightarrow$ de terugbetalingen die je doet aan de bank
- **verzekeringsproduct**: uitkeringen of verzekerde bedragen $\Longleftrightarrow$ de premie(s) die je betaalt voor deze verzekering.

De nieuwe wagen van Mr. Incredible




geleend bedrag $(20\,000, 0, 0, 0, 0)$
bank
Mr. Incredible
aflossingen $(0, K, K, K, K)$

Twee kasstromen:

- Mr. Incredible ontvangt 20 000 EUR op $t = 0$ van de bank.
- Mr. Incredible betaalt aan de bank K EUR op $t = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

  Dit kan je schrijven als vector $(0, K, K, K, K)$, met contante waarde

$$K \cdot v + K \cdot v^2 + K \cdot v^3 + K \cdot v^4$$

(schets op een tijdslijn!)

De nieuwe wagen van Mr. Incredible

Aflossing K berekenen

De transactie is **marktconform**, of de kasstromen zijn actuarieel equivalent, indien:

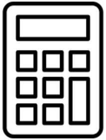
$$\begin{aligned} 20\,000 &= K \cdot v + K \cdot v^2 + K \cdot v^3 + K \cdot v^4 \\ &= K \cdot (v + v^2 + v^3 + v^4) \\ &= K \sum_{k=1}^{4} v^k. \end{aligned}$$

Vragen:

- Laat zien dat bij $i = 0.03$ de aflossing $K = 5380.54$ EUR (met Excel én via somregels meetkundige rij).
- Welke vergoeding ('hoeveel interest?') heeft onze superheld aan de bank betaald?

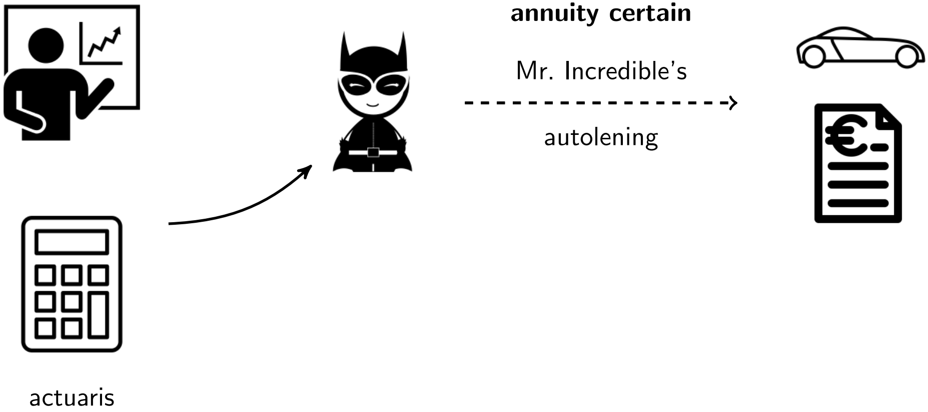
De actuaris aan het werk

Over annuïteiten: gegarandeerd of bij leven

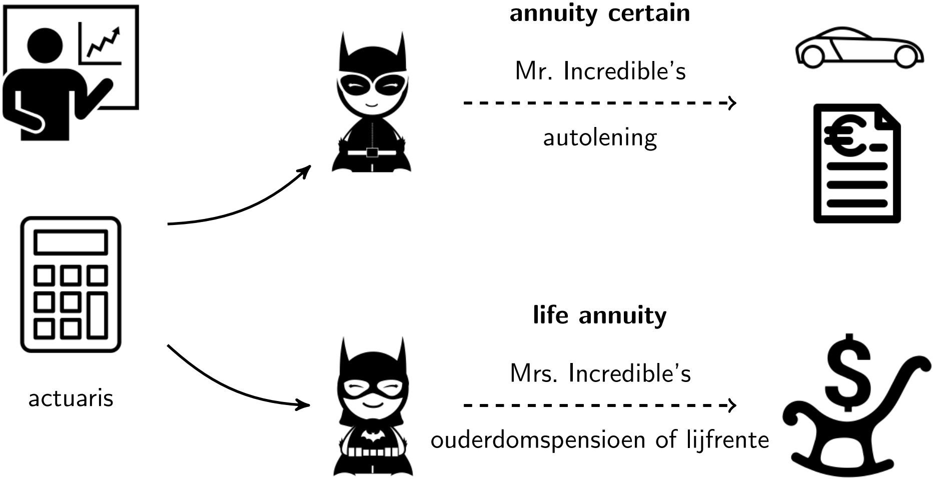


actuaris

Over annuïteiten: gegarandeerd of bij leven

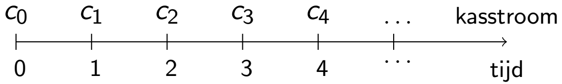


Over annuïteiten: gegarandeerd of bij leven

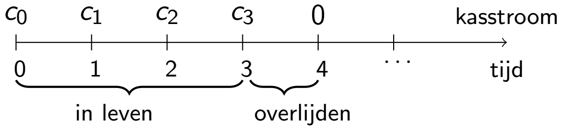


Zoek de verschillen!

- Een annuïteit ('annuity certain') geeft een gegarandeerde kasstroom:



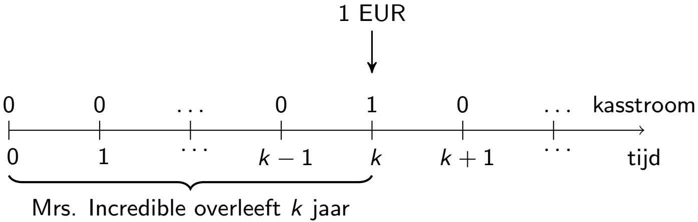
- Bij een lijfrente ('life annuity') is de kasstroom **afhankelijk van het in leven zijn van de begunstigde**:



Bijgevolg: aantal betalingen is niet-deterministisch, maar **stochastisch**!

Mrs. Incredible is een 40-jarige superheld op $t = 0$ en doet aan pensioenplanning.

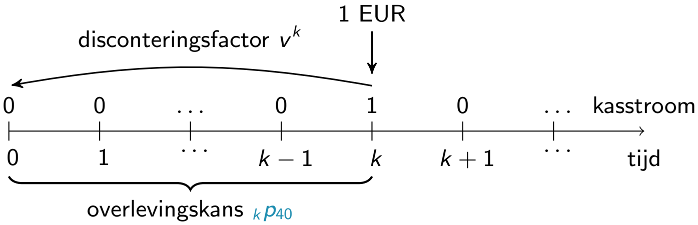
Mrs. Incredible is geïnteresseerd in onderstaand (eenvoudig) pensioenproduct:



Hoe kunnen we **van financieel naar actuarieel waarderen** overstappen? **Met kansrekening!**

Waarderen van een lijfrente: een simpel voorbeeld

Van financieel naar actuarieel waarderen:



Met **verwachte** contante waarde ('expected present value'):

$$\text{EPV} = 1 \cdot v^k \cdot {}_k p_{40}.$$

Waarderen van een lijfrente: intuïtie

Zeg P de prijs (op $t = 0$) van dit product.

Veronderstel dat 1 000 40-jarige (vrouwelijke) superhelden dit product kopen op $t = 0$.

$\dots$  $\dots$

Iedere superheld betaalt P op $t = 0$.

Verzekeraar ontvangt $1\,000 \cdot P$ op $t = 0$ (**'premies'**).

Dit bedrag groeit aan tot $1\,000 \cdot P \cdot (1+i)^k$ op $t = k$.

Naar verwachting ('gemiddeld') zijn $1\,000 \cdot {}_k p_{40}$ superhelden in leven op $t = k$.
(Verwachtingswaarde van een BIN(n, p) verdeling is $n \cdot p$.)

Zij moeten allemaal 1 EUR ontvangen op $t = k$ van de (levens)verzekeraar.

Actuarieel equivalent betekent hier:

$$\begin{aligned} 1\,000 \cdot P \cdot (1+i)^k &= 1 \cdot 1000 \cdot {}_k p_{40} \\ &\Downarrow \\ P &= 1 \cdot (1+i)^{-k} \cdot {}_k p_{40} = 1 \cdot v^k \cdot {}_k p_{40}. \end{aligned}$$

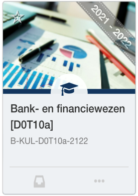
Annuïteit vs lijfrente: let op de verschillen!

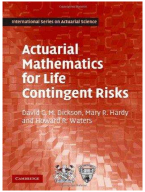
Mrs. Incredible is een 40-jarige superheld op $t = 0$, actief in België.

- **Annuïteit** ('annuity certain')
  - 1 EUR op $k = 25$, gegarandeerd, en $i = 0.03$ de constante, jaarlijkse rente
  - met $\text{PV} = v^{25} = (1+i)^{-25} \approx 0.48$
- **Lijfrente** ('life annuity')
  - 1 EUR op $k = 25$, bij leven, en $i = 0.03$ de constante, jaarlijkse rente
  - met $\text{EPV} = v^{25} \cdot {}_{25}p_{40} = (1+i)^{-25} \cdot 0.93 \approx 0.44$
  - met ${}_{25}p_{40} \approx 0.93$ de kans dat Mrs. Incredible haar 65e verjaardag viert (cfr. StatBel of Human Mortality Database, periode tafel 2020 voor vrouwen).

Tot slot

Tot slot





Met (een uitbreiding van) deze basistechnieken kan je

- **financieel waarderen**, bijv.:
  - actuele waarde van een investering
  - leningen
- **actuarieel waarderen**, bijv.:
  - een verzekering bij overlijden, zoals een schuldsaldoverzekering
  - een Win for Life product.

De combinatie van financieel waarderen en kansrekening is essentieel bij het **rekenen aan risico's**, het werkgebied van de actuaris!